

Verkettung von Funktionen

1. Einstieg: Der Ölfleck

Ein kreisförmiger Ölfleck breitet sich aus. Sein Radius wächst mit der Zeit gemäß $r(t) = 0,5t$ (t in min, r in m). Die Fläche hängt vom Radius ab: $A(r) = \pi r^2$.

Um die Fläche nach t Minuten zu berechnen, rechnet man **zwei Schritte nacheinander**:

$$t \xrightarrow{r} r(t) = 0,5t \xrightarrow{A} A(r(t)) = \pi (0,5t)^2 = 0,25\pi t^2.$$

Z. B. nach $t = 4$ min: $r(4) = 2$ m und $A(2) = 4\pi \text{ m}^2 \approx 12,6 \text{ m}^2$.

2. Definition

Merke: Verkettung zweier Funktionen

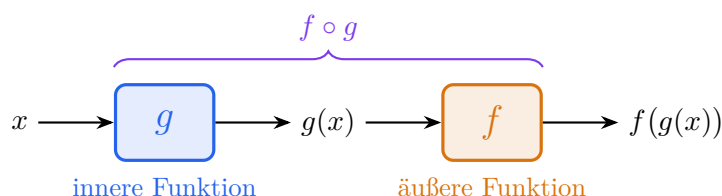
Sind f und g Funktionen, so heißt die Funktion h mit

$$h(x) = f(g(x))$$

die **Verkettung** von f und g . Man schreibt $h = f \circ g$ und liest „ f nach g “ oder „ f verkettet mit g “.

- g heißt **innere Funktion**, f heißt **äußere Funktion**.
- Es wird **zuerst die innere Funktion g , danach die äußere Funktion f** angewendet. Die *rechts* stehende Funktion in $f \circ g$ wirkt also zuerst!

Hinweis: In manchen Schulbüchern wird $h(x) = u(v(x))$ geschrieben, mit äußerer Funktion u und innerer Funktion v .



Beispiel: Die Reihenfolge ist wichtig

$$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x + 1 \quad (\text{jeweils } D = \mathbb{R})$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x + 1)^2 \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 1$$

Für $x = 1$: $(f \circ g)(1) = 4$, aber $(g \circ f)(1) = 2$.

$\Rightarrow$ **Im Allgemeinen gilt $f \circ g \neq g \circ f$.**

Rechentipp: Beim Einsetzen wird jedes x im Term der äußeren Funktion durch den **eingeklammerten** Term der inneren Funktion ersetzt.

3. Definitionsmenge der Verkettung

Die äußere Funktion f kann nur Zahlen aus ihrer Definitionsmenge D_f verarbeiten. Das **Zwischenergebnis** $g(x)$ muss deshalb in D_f liegen.

Merke: Definitionsmenge

$$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$$

Zwei Bedingungen: ① $x \in D_g$ ② $g(x) \in D_f$

Beispiel

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (D_f = \mathbb{R}_0^+), \quad g(x) = 4 - x^2 \quad (D_g = \mathbb{R})$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

Bedingung: $4 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4 \iff -2 \leq x \leq 2$. Also: $D_{f \circ g} = [-2; 2]$, obwohl $D_g = \mathbb{R}$ ist.

4. Zerlegen einer Funktion

Oft muss man umgekehrt eine gegebene Funktion h in eine innere und eine äußere Funktion zerlegen (z. B. später für die Kettenregel).

Leitfrage: Was würde man in den Taschenrechner zuerst eintippen? $\Rightarrow$ Das ist die **innere Funktion**.

$h(x)$	innere Funktion $g(x)$	äußere Funktion $f(u)$
$(3x - 2)^5$	$3x - 2$	u^5
$\sqrt{x^2 + 1}$	$x^2 + 1$	$\sqrt{u}$
e^{-x^2}	$-x^2$	e^u
$\sin(2x)$	$2x$	$\sin u$
$\sin^2 x = (\sin x)^2$	$\sin x$	u^2

Bemerkung

Die Zerlegung ist **nicht eindeutig**. Beispiel $h(x) = (2x + 1)^6$:

$$g(x) = 2x + 1, f(u) = u^6 \quad \text{oder} \quad g(x) = (2x + 1)^2, f(u) = u^3.$$

Man wählt die Zerlegung, mit der das Weiterrechnen am einfachsten ist.

⚠ Achtung – typische Fehler

- $(f \circ g)(x)$ heißt „zuerst g , dann f “ – nicht umgekehrt.
- $\sin^2 x$ bedeutet $(\sin x)^2$ und ist **nicht** $\sin(x^2)$.
- Verkettung ist **Einsetzen**, nicht Multiplizieren: $f \circ g \neq f \cdot g$.
- Klammern beim Einsetzen nicht vergessen: $f(x) = x^2, g(x) = x + 1 \Rightarrow f(g(x)) = (x + 1)^2 \neq x^2 + 1$.
- Die Definitionsmenge wird am **nicht vereinfachten** Term bestimmt:
 $g(f(x)) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$ gilt nur für $x \geq 0$, also $D_{g \circ f} = \mathbb{R}_0^+$ und nicht $\mathbb{R}$.