

Aufgabe 7 ★★★ Gesuchte Funktionen

- a) ★★★ Es ist $f(x) = x^2$ und $h(x) = (x-3)^2$. Gib eine Funktion g an mit $f \circ g = h$.
- b) ★★★ Es ist $g(x) = 2x + 1$ und $h(x) = e^{2x+1}$. Gib eine Funktion f an mit $f \circ g = h$.
- c) ★★★ Es ist $f(x) = e^x$ und $h(x) = e^{x^2-1}$. Gib eine Funktion g an mit $f \circ g = h$.
- d) ★★★ Es ist $g(x) = x^2$ und $h(x) = \sqrt{x^2+5}$. Gib eine Funktion f an mit $f \circ g = h$.
- e) ★★★ Es ist $f(x) = x+a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $g(x) = x^2$. Bestimme alle Werte von a , für die $f \circ g = g \circ f$ gilt.

Aufgabe 8 ★★★ Für Expertinnen und Experten: dreifach verkettet

- a) Schreibe $h(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$ als Verkettung $h = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ dreier Funktionen und bestimme D_h .
- b) Gegeben ist $k(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$. Zerlege k ebenso in drei Funktionen, bestimme D_k und berechne $k(4)$ und $k(9)$.

Lösungen

Hinweise für die Lehrkraft: typische Schülerfehler

- **Reihenfolge vertauscht:** $(f \circ g)(x)$ wird als „erst f , dann g “ gelesen (Leserichtung von links nach rechts).
- **Fehlende Klammern beim Einsetzen:** $f(g(x)) = 3x - 1^2$ statt $(3x - 1)^2$; ebenso Fehler bei $-x^2$ vs. $(-x)^2$.
- **Verwechslung mit dem Produkt:** $(f \circ g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- **Schreibweise $\sin^2 x$:** wird als $\sin(x^2)$ interpretiert.
- **Definitionsmenge:** Es wird nur D_g beachtet oder D am vereinfachten Term bestimmt (z. B. $4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$ mit angeblich $D = \mathbb{R}$).
- **Ungleichungen:** Bei $x^2 \leq 4$ wird nur $x \leq 2$ notiert; bei $x^2 - 2x - 3 > 0$ wird das Lösungsintervall zwischen den Nullstellen statt außerhalb angegeben.
- **„für ein x “ vs. „für alle x “:** In Aufgabe 7e) wird eine einzelne Stelle getestet und daraus auf Gleichheit der Funktionen geschlossen.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Man rechnet immer *von innen nach außen*:

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3 \cdot 2 - 1) = f(5) = 5^2 = \underline{25}, \quad (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 3 \cdot 4 - 1 = \underline{11}.$$

b) Der Term der inneren Funktion wird *in Klammern* für x in die äußere Funktion eingesetzt:

$$(f \circ g)(x) = f(3x - 1) = (3x - 1)^2 = \underline{9x^2 - 6x + 1}, \quad (g \circ f)(x) = g(x^2) = \underline{3x^2 - 1}.$$

Probe mit a): $9 \cdot 4 - 12 + 1 = 25$ und $3 \cdot 4 - 1 = 11$. ✓

c)

$$(f \circ f)(x) = f(x^2) = (x^2)^2 = \underline{x^4}, \quad (g \circ g)(x) = g(3x - 1) = 3(3x - 1) - 1 = \underline{9x - 4}.$$

d) Gleichsetzen:

$$9x^2 - 6x + 1 = 3x^2 - 1 \iff 6x^2 - 6x + 2 = 0 \iff 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Diskriminante: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 9 - 12 = -3 < 0$. Die Gleichung hat keine Lösung.
Es gibt also **kein** $x \in \mathbb{R}$ mit $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

☞ Erklärung: Warum genügt Teilaufgabe a) nicht?

Aus a) folgt nur, dass die beiden Verkettungen an der *einen* Stelle $x = 2$ verschieden sind. An anderen Stellen könnten sie trotzdem übereinstimmen. Erst die Gleichung in d) prüft *alle* x gleichzeitig. Eine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ hat genau dann keine reelle Lösung, wenn $b^2 - 4ac < 0$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Zuerst den inneren Wert in der Tabelle ablesen, dann mit diesem Wert erneut in die Tabelle

gehen:

$$\begin{aligned} f(g(0)) &= f(3) = \underline{4} & g(f(0)) &= g(1) = \underline{0} \\ (f \circ g)(2) &= f(g(2)) = f(-1) = \underline{3} & (g \circ f)(-1) &= g(f(-1)) = g(3) = \underline{1} \\ f(f(1)) &= f(-1) = \underline{3} \end{aligned}$$

b)

x	-1	0	1	2	3
$g(x)$	2	3	0	-1	1
$(f \circ g)(x)$	$f(2) = 0$	$f(3) = 4$	$f(0) = 1$	$f(-1) = 3$	$f(1) = -1$

c) Es ist $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4)$. Die Zahl 4 gehört aber nicht zu $D_g = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$, der Wert $g(4)$ existiert also nicht. Damit ist $3 \notin D_{g \circ f}$.

☞ Erklärung: Zwischenergebnis prüfen

Genau hier steckt die Idee der Definitionsmenge einer Verkettung: Die Zahl 3 liegt zwar in D_f , das *Zwischenergebnis* $f(3) = 4$ liegt aber nicht in der Definitionsmenge der äußeren Funktion g . Allgemein gilt $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$.

Lösung zu Aufgabe 3

Leitfrage: *Was wird zuerst berechnet?* Das ist die innere Funktion.

	$h(x)$	$g(x)$	$f(u)$
a)	$(2x + 5)^4$	$2x + 5$	u^4
b)	$\sqrt{1 - x^2}$	$1 - x^2$	$\sqrt{u}$
c)	$e^{-0,5x}$	$-0,5x$	e^u
d)	$\sin(\pi x)$	πx	$\sin u$
e)	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$x^2 + 1$	$\frac{1}{u}$
f)	$\ln(x^2 + 1)$	$x^2 + 1$	$\ln u$
g)	$\cos^2 x$	$\cos x$	u^2
h)	$e^{\sin x}$	$\sin x$	e^u
i)	$\frac{2}{(3x-1)^3}$	$3x - 1$	$\frac{2}{u^3} = 2u^{-3}$

j) Drei mögliche Zerlegungen von $h(x) = (x^2 + 1)^6$:

- $g(x) = x^2 + 1, f(u) = u^6: f(g(x)) = (x^2 + 1)^6 \checkmark$
- $g(x) = (x^2 + 1)^2, f(u) = u^3: f(g(x)) = ((x^2 + 1)^2)^3 = (x^2 + 1)^6 \checkmark$
- $g(x) = x^2, f(u) = (u + 1)^6: f(g(x)) = (x^2 + 1)^6 \checkmark$

Weitere Möglichkeiten: $g(x) = (x^2 + 1)^3, f(u) = u^2$ oder $g(x) = x^2 + 1, f(u) = u^2 \cdot u^4$ usw. Für das spätere Ableiten ist die erste Zerlegung die günstigste.

☞ **Erklärung: Teilaufgabe g): $\cos^2 x$**

$\cos^2 x$ ist eine Kurzschreibweise für $(\cos x)^2$. Es wird also zuerst der Kosinus berechnet und das Ergebnis anschließend quadriert. Innere Funktion ist daher $g(x) = \cos x$.

Die Zerlegung $g(x) = x^2$, $f(u) = \cos u$ ergäbe $\cos(x^2)$ – eine völlig andere Funktion! Probe mit $x = \pi$: $\cos^2 \pi = (-1)^2 = 1$, aber $\cos(\pi^2) \approx -0,90$.

☞ **Erklärung: Teilaufgabe i): Faktor und Bruch**

Der Faktor 2 und der Bruch gehören zur *äußeren* Funktion, denn sie werden erst angewendet, nachdem $3x - 1$ berechnet ist. Wer $g(x) = (3x - 1)^3$ und $f(u) = \frac{2}{u}$ wählt, liegt ebenfalls richtig – die Zerlegung ist nicht eindeutig.

Lösung zu Aufgabe 4

a) Erst den inneren Wert an G_g (bzw. G_f) ablesen, diesen dann als neue Stelle verwenden:

$$f(g(0)) = f(2) = \underline{-1}, \quad g(f(0)) = g(-1) = \underline{3}.$$

b)

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(-1) = \underline{2}, \quad (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = \underline{0}.$$

c) Rückwärts denken: Zuerst wird ermittelt, *welcher innere Wert* $u = g(x)$ zum Ergebnis 2 führt.

① $f(u) = 2$: Am Graphen G_f liest man ab: $u = -1$ oder $u = 3$.

② $g(x) = -1 \Rightarrow x = 3$; $g(x) = 3 \Rightarrow x = -1$.

Also: $f(g(x)) = 2 \iff x \in \{-1; 3\}$.

d)

$$(f \circ g)(x) = f(2 - x) = ((2 - x) - 1)^2 - 2 = (1 - x)^2 - 2 = (x - 1)^2 - 2 = f(x).$$

Dabei wurde $(1 - x)^2 = (x - 1)^2$ verwendet. Also gilt $f \circ g = f$.

Graphische Deutung: $g(x) = 2 - x$ ordnet jeder Stelle x ihr Spiegelbild bezüglich der Geraden $x = 1$ zu, denn der Mittelwert von x und $2 - x$ ist $\frac{x + (2 - x)}{2} = 1$. Der Graph G_f ist eine Parabel mit Scheitel $S(1 | -2)$ und daher achsensymmetrisch zur Geraden $x = 1$. Gespiegelte Stellen haben deshalb denselben Funktionswert: $f(2 - x) = f(x)$.

Kontrolle mit c): $f(x) = 2 \iff (x - 1)^2 = 4 \iff x = -1 \vee x = 3$. ✓

☞ **Erklärung: Teilaufgabe c): Gleichungen der Form $f(g(x)) = c$**

Man löst die Gleichung *von außen nach innen*: Zuerst die äußere Gleichung $f(u) = c$ nach u auflösen (hier zwei Lösungen!), dann für jede Lösung die innere Gleichung $g(x) = u$ lösen. Wer nur eine Lösung von $f(u) = 2$ findet, verliert eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Zuerst wird aus der Zeit der Radius berechnet, dann aus dem Radius das Volumen:

innere Funktion: $r(t) = 2 + 0,5t$, äußere Funktion: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

$$(V \circ r)(t) = V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi (2 + 0,5t)^3 \quad (0 \leq t \leq 20).$$

b) $r(4) = 2 + 0,5 \cdot 4 = 4$ (cm), also

$$V(r(4)) = V(4) = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi \approx \underline{268,1 \text{ cm}^3}.$$

c) Von außen nach innen:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 972\pi \quad | \cdot \frac{3}{4\pi}$$

$$r^3 = 729$$

$$r = \sqrt[3]{729} = 9 \quad (\text{cm})$$

$$2 + 0,5t = 9 \iff 0,5t = 7 \iff t = 14.$$

Nach 14 Sekunden beträgt das Volumen $972\pi \text{ cm}^3$. ($t = 14$ liegt im Intervall $[0; 20]$.)

d) Bei $r \circ V$ müsste zuerst V angewendet werden. V liefert ein *Volumen* (in cm^3). Dieses würde dann in r eingesetzt, obwohl r eine *Zeit* (in s) erwartet. Das Zwischenergebnis passt also inhaltlich (Größe und Einheit) nicht als Eingabe der äußeren Funktion – die Verkettung ist sinnlos.

☞ Erklärung: Sachzusammenhang und Reihenfolge

In Sachaufgaben verrät die *Einheit*, welche Funktion innen steht: Die Ausgabe der inneren Funktion muss genau die Größe sein, die die äußere Funktion als Eingabe erwartet: $t [\text{s}] \xrightarrow{r} r [\text{cm}] \xrightarrow{V} V [\text{cm}^3]$.

Lösung zu Aufgabe 6

Vorgehen jeweils: ① $x \in D_g$? ② $g(x) \in D_f$?

a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - x^2}$. $D_g = \mathbb{R}$; Bedingung $4 - x^2 \geq 0$:

$$4 - x^2 \geq 0 \iff x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2. \quad D_{f \circ g} = [-2; 2].$$

$(g \circ f)(x) = 4 - (\sqrt{x})^2 = 4 - x$ für $x \geq 0$. Hier ist $D_f = \mathbb{R}_0^+$ und g verarbeitet jede reelle Zahl, also $D_{g \circ f} = \mathbb{R}_0^+$.

b) $(f \circ g)(x) = \ln(x - 2)$. Bedingung: $x - 2 > 0 \iff x > 2$. $D_{f \circ g} =]2; \infty[$.

c) $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$. Bedingung: $x^2 - 9 \neq 0 \iff x \neq \pm 3$. $D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$.

d) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\ln x}$.

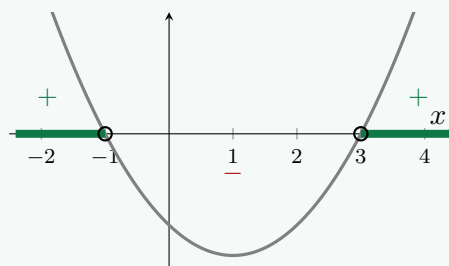
① $x \in D_g = \mathbb{R}^+$, also $x > 0$. ② $\ln x \geq 0 \iff x \geq 1$ (denn $\ln 1 = 0$ und $\ln$ ist streng monoton steigend).

Beide Bedingungen zusammen: $D_{f \circ g} = [1; \infty[$.

e) $(f \circ g)(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$. Bedingung: $x^2 - 2x - 3 > 0$.

Nullstellen: $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1) = 0 \iff x = 3 \vee x = -1$.

Der Graph von $y = x^2 - 2x - 3$ ist eine nach oben geöffnete Parabel; sie verläuft *außerhalb* der Nullstellen oberhalb der x -Achse.



$D_{f \circ g} =]-\infty; -1[\cup]3; \infty[$ (die Nullstellen selbst gehören nicht dazu, da $\ln 0$ nicht definiert ist).

☞ **Erklärung: Teilaufgabe a): Definitionsmenge am ursprünglichen Term bestimmen**

Der vereinfachte Term $4 - x$ würde $D = \mathbb{R}$ nahelegen. Das ist falsch! Die Funktion $g \circ f$ entsteht, indem man *zuerst* $\sqrt{x}$ berechnet – und das geht nur für $x \geq 0$. Die Vereinfachung $(\sqrt{x})^2 = x$ ist überhaupt nur für $x \geq 0$ zulässig. Merke: **Erst die Definitionsmenge bestimmen, dann vereinfachen.**

☞ **Erklärung: Teilaufgabe a): $x^2 \leq 4$ richtig lösen**

Aus $x^2 \leq 4$ folgt *nicht* nur $x \leq 2$! Auch $x = -3$ erfüllt $x \leq 2$, aber $(-3)^2 = 9 > 4$. Richtig ist: $x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2$. Beim Wurzelziehen aus einer Ungleichung muss man immer an den Betrag denken.

☞ **Erklärung: Teilaufgabe e): quadratische Ungleichungen**

Eine quadratische Ungleichung löst man am sichersten mit einer *Skizze*: Nullstellen bestimmen, Öffnungsrichtung der Parabel feststellen, dann ablesen, wo der Graph oberhalb (> 0) bzw. unterhalb (< 0) der x -Achse liegt. Bei einer nach oben geöffneten Parabel ist der Term *zwischen* den Nullstellen negativ und *außerhalb* positiv.

Lösung zu Aufgabe 7

a) f quadriert. Gesucht ist also, was quadriert wird: $g(x) = \underline{x - 3}$.

Probe: $f(g(x)) = (x - 3)^2 = h(x) \checkmark$. Auch $g(x) = 3 - x$ ist möglich, denn $(3 - x)^2 = (x - 3)^2$.

b) Die innere Funktion $2x + 1$ steht im Exponenten von e . Ersetzt man $2x + 1$ durch u , erhält man $f(u) = e^u$, also $f(x) = e^x$. Probe: $f(g(x)) = e^{2x+1} \checkmark$

c) $f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{x^2-1}$, also $g(x) = \underline{x^2 - 1}$.

d) Unter der Wurzel steht $x^2 + 5 = g(x) + 5$. Ersetzt man x^2 durch u , wird daraus $\sqrt{u + 5}$:

$$f(u) = \sqrt{u + 5}, \quad \text{also} \quad f(x) = \underline{\sqrt{x + 5}} \quad (D_f = [-5; \infty[).$$

Probe: $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 5} = h(x) \checkmark$

e)

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 + a, \quad (g \circ f)(x) = g(x + a) = (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Die Funktionen sind gleich, wenn die Terme **für alle** $x \in \mathbb{R}$ übereinstimmen:

$$x^2 + a = x^2 + 2ax + a^2 \iff 2a \cdot x + (a^2 - a) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ein linearer Term $mx + c$ ist nur dann für alle x gleich null, wenn $m = 0$ und $c = 0$ gilt (Koeffizientenvergleich):

$$2a = 0 \quad \text{und} \quad a^2 - a = 0 \implies a = 0.$$

Für $a = 0$ gilt tatsächlich $f(x) = x$ und damit $f \circ g = g = g \circ f$. Ergebnis: $a = 0$.

☞ **Erklärung: Teilaufgabe d): die äußere Funktion finden**

Die äußere Funktion wird gefunden, indem man im Term von h den Term der inneren Funktion *vollständig* durch eine neue Variable u ersetzt. Hier: $\sqrt{\boxed{x^2}} + 5 \rightarrow \sqrt{u + 5}$. Typischer Fehler: $f(x) = \sqrt{x + 5}$ wird mit $f(x) = \sqrt{x} + 5$ verwechselt – dann wäre $f(g(x)) = \sqrt{x^2} + 5 = |x| + 5$.

☞ **Erklärung: Teilaufgabe e): „für alle x “ statt „für ein x “**

Setzt man nur eine Zahl ein, z.B. $x = 0$, erhält man $a = a^2$, also $a = 0$ oder $a = 1$. Das reicht aber nicht! Für $a = 1$ gilt $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ und $(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 1$; die Terme stimmen nur bei $x = 0$ überein. Zwei Funktionen sind erst dann gleich, wenn ihre Werte an *jeder* Stelle übereinstimmen. Mit einer zweiten Stelle (z.B. $x = 1$: $a^2 + a = 0$, also $a = 0$ oder $a = -1$) bleibt nur $a = 0$ übrig.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Die Rechenschritte in der richtigen Reihenfolge: $x \xrightarrow{f_1} x^2 + 1 \xrightarrow{f_2} \ln(x^2 + 1) \xrightarrow{f_3} \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$.

$$f_1(x) = x^2 + 1, \quad f_2(x) = \ln x, \quad f_3(x) = \sqrt{x}, \quad h = f_3 \circ f_2 \circ f_1.$$

Definitionsmenge:

- f_1 ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, und es gilt $x^2 + 1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \ln(x^2 + 1)$ ist für alle x definiert.
- Da $\ln$ streng monoton steigend ist und $x^2 + 1 \geq 1$ gilt: $\ln(x^2 + 1) \geq \ln 1 = 0 \Rightarrow$ die Wurzel ist für alle x definiert.

Also: $D_h = \mathbb{R}$.

b) $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = x - 1$, $f_3(x) = \ln x$, $k = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

- Wurzel: $x \geq 0$.
- Logarithmus: $\sqrt{x} - 1 > 0 \iff \sqrt{x} > 1 \iff x > 1$.

Also: $D_k =]1; \infty[$.

$$k(4) = \ln(\sqrt{4} - 1) = \ln 1 = \underline{0}, \quad k(9) = \ln(\sqrt{9} - 1) = \ln 2 \approx \underline{0,69}.$$

☞ **Erklärung: Reihenfolge bei mehrfacher Verkettung**

Bei $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ wirkt – wie bei zwei Funktionen – die *rechts* stehende Funktion zuerst: $h(x) = f_3(f_2(f_1(x)))$. Die Definitionsmenge prüft man Schritt für Schritt von innen nach außen: Jedes Zwischenergebnis muss in der Definitionsmenge der nächsten Funktion liegen.